逆双曲線関数を分母に含む積分の一般化

棟近祐希 *

2023 年 5 月 31 日

* N/S 高研究部 数理科学グループ
徳山工業高等専門学校 情報電子工学科 4 年

1　概要

本稿では以下の定理を証明する。以下では

$$\operatorname{artanh} x \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$
$$\zeta(s) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$$
$$\operatorname{artanh}^n x \overset{\text{def.}}{=} (\operatorname{artanh} x)^n$$

という記号を用いる。また、空和は 0 と定める。

定理 1.1. (=定理 3.4) 正整数 n と非負整数 m に対しある長さ $n+m$ の有理数列 $c_{n,m}$ が存在し

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2m}}{\operatorname{artanh}^n x}dx = \sum_{k=1}^{n+m} c_{n,m,k}\frac{\zeta(2k+1)}{\pi^{2k}}$$

を満たす。

前提知識として重積分に対する置換やフーリエ級数展開などを要求する。しかし、これらの知識は各命題の証明にのみ用いられるため高校範囲の積分を理解していれば内容を理解することができる構成になっている。

2　具体例

具体的に n, m に適当な値を入れて計算した値を紹介する。

$$\int_0^1 \frac{x}{\operatorname{artanh} x}dx = 7\frac{\zeta(3)}{\pi^2} \quad (n=1, m=0)$$
$$\int_0^1 \frac{x^4}{\operatorname{artanh}^2 x}dx = -762\frac{\zeta(7)}{\pi^6} + 124\frac{\zeta(5)}{\pi^4} - \frac{14}{5}\frac{\zeta(3)}{\pi^2} \quad (n=2, m=1)$$
$$\int_0^1 \frac{x^6}{\operatorname{artanh}^2 x}dx = 4088\frac{\zeta(9)}{\pi^8} - 1270\frac{\zeta(7)}{\pi^6} + \frac{1736}{15}\frac{\zeta(5)}{\pi^4} - 2\frac{\zeta(3)}{\pi^2} \quad (n=2, m=2)$$
$$\int_0^1 \frac{x^5}{\operatorname{artanh}^3 x}dx = -14308\frac{\zeta(9)}{\pi^8} + 2540\frac{\zeta(7)}{\pi^6} - \frac{1426}{15}\frac{\zeta(5)}{\pi^4} \quad (n=3, m=1)$$

3　証明

命題の証明をいくつかの補題に分割する。以下では

$$\Gamma(s) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$
$$\binom{m'}{k'} \overset{\text{def.}}{=} \frac{m'!}{k'!(m'-k')!}$$

という記号を用いる。また、実数 $t_1,\ldots,t_n$ が与えられているとき $\Sigma t \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{n} t_k$ と書く。

補題 3.1. $g_{m,n}(x) \overset{\text{def.}}{=} \Gamma(1+x)\Gamma(2m+n+1-x)$ に対し、

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2m}}{\operatorname{artanh}^n x}dx = \frac{2^n}{(n+2m)!}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^k\int_{[0,1]^n} g_{m,n}(\Sigma t+k)dt_1dt_2\ldots dt_n$$

が成立する。

証明.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^{n+2m}}{\operatorname{artanh}^n x}dx \\
&= 2^n\int_0^1 \frac{x^{n+2m}}{\left(\log\frac{1+x}{1-x}\right)^n}dx \\
&= \frac{2^n}{(n+2m)!}\int_0^\infty y^{n+2m+1}e^{-y}dy\int_0^1 \frac{x^{n+2m}}{\left(\log\frac{1+x}{1-x}\right)^n}dx \\
&= \frac{2^{n-1}}{(n+2m)!}\int_0^\infty\int_{-1}^1 \frac{x^{n+2m}}{\left(\log\frac{1+x}{1-x}\right)^n}y^{n+2m+1}e^{-y}dxdy \\
&= \frac{2^{n-1}}{(n+2m)!}\int_0^\infty\int_{-y}^y \frac{x^{n+2m}}{\left(\log\frac{y+x}{y-x}\right)^n}e^{-y}dxdy \\
&= \frac{2^n}{(n+2m)!}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(x-y)^{n+2m}}{(\log x-\log y)^n}e^{-(x+y)}dxdy \\
&= \frac{2^n}{(n+2m)!}\int_0^\infty\int_0^\infty (x-y)^{2m}e^{-(x+y)}\left(\int_0^1 x^ty^{1-t}dt\right)^n dxdy \\
&= \frac{2^n}{(n+2m)!}\int_{[0,1]^n}\int_0^\infty\int_0^\infty (x-y)^{2m}e^{-(x+y)}x^{\Sigma t}y^{n-\Sigma t}dxdydt_1dt_2\ldots dt_n \\
&= \frac{2^n}{(n+2m)!}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^k\int_{[0,1]^n}\int_0^\infty x^{k+\Sigma t}e^{-x}dx\int_0^\infty y^{2m-k+n-\Sigma t}e^{-y}dydt_1dt_2\ldots dt_n \\
&= \frac{2^n}{(n+2m)!}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^k\int_{[0,1]^n}\Gamma(k+\Sigma t+1)\Gamma(2m-k+n-\Sigma t+1)dt_1dt_2\ldots dt_n \\
&= \frac{2^n}{(n+2m)!}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^k\int_{[0,1]^n} g_{m,n}(\Sigma t+k)dt_1dt_2\ldots dt_n.
\end{aligned}$$

□

補題 3.2. 関数 $f\colon [0,n] \to \mathbb{R}$ が積分可能なら、以下の等式が成立する。

$$\int_{[0,1]^n} f(\Sigma t) dt_1 dt_2 \dots dt_n = n \sum_{0 \le i \le k < n} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \int_0^1 (k-i+x)^{n-1} f(x+k) dx.$$

証明. $\Sigma_k t \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{k} t_i$ とする。すると、

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^n} f(\Sigma_n t) dt_1 dt_2 \dots dt_n \\
&= \left[t_1 \int_{[0,1]^{n-1}} f(\Sigma_n t) dt_2 \dots dt_n \right]_{t_1=0}^{t_1=1} - \int_{[0,1]^{n-1}} t_1 \left\{ f(\Sigma_{n-1} t + 1) - f(\Sigma_{n-1} t) \right\} dt_1 \dots dt_{n-1} \\
&= \int_{[0,1]^{n-1}} f(\Sigma_{n-1} t + 1) dt_1 \dots dt_{n-1} \\
&\quad - \frac{1}{n-1} \int_{[0,1]^{n-1}} \Sigma_{n-1} t \left\{ f(\Sigma_{n-1} t + 1) - f(\Sigma_{n-1} t) \right\} dt_1 \dots dt_{n-1} \\
&= \frac{1}{n-1} \int_{[0,1]^{n-1}} \left\{ (n-1-\Sigma_{n-1} t) f(\Sigma_{n-1} t + 1) + f(\Sigma_{n-1} t) \right\} dt_1 \dots dt_{n-1}
\end{aligned}$$

上の漸化式を用いることで、ある $n-1$ 次多項式 P_k を用いて

$$\int_{[0,1]^n} f(\Sigma t) dt_1 dt_2 \dots dt_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 P_k(x) f(x+k) dx$$

が成立することが分かる。ここで、0 以上 n 未満の整数 k_1 と 0 以上 1 未満の実数 k_2 を用いて $f(x)$ を以下のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \le k_1 + k_2), \\ 0 & (x > k_1 + k_2). \end{cases}$$

この $f(x)$ を上で得た式に代入し、左辺に包除原理を適用すると以下のような式を得る。

$$\sum_{i=0}^{k_1} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{(k_1 + k_2 - i)^n}{n!} = \sum_{i=0}^{k_1 - 1} \int_0^1 P_i(x) dx + \int_0^{k_2} P_{k_1}(x) dx.$$

この式に $k_2 = 0$ を代入したものを同じ上の式に代入すると次のようになる。

$$\int_0^{k_2} P_{k_1}(x) dx = \sum_{i=0}^{k_1} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{(k_1 + k_2 - i)^n - (k_1 - i)^n}{n!}.$$

$0 < k_2 < 1$ とし、この式を k_2 で偏微分すると

$$P_{k_1}(k_2) = n \sum_{i=0}^{k_1} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{(k_1 + k_2 - i)^{n-1}}{n!} = n \sum_{i=0}^{k_1} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} (k_1 + k_2 - i)^n$$

が得られる。この式を P_k を定義した式に代入することで補題は証明される。 □

補題 3.3. 任意の正整数 n に対し、以下を満たす長さ $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ の整数列 p_n が存在する。

$$f_n \overset{\text{def.}}{=} \int_0^1 t^{n-1}\frac{t(1-t)}{\sin \pi t}dt = \sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} p_{n,k}\frac{\zeta(2k+1)}{\pi^{2k+1}}.$$

証明. $B_n \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{1}{\pi^{n+2}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \log\tan x dx$ とする。すると、

$$\begin{aligned}
f_n &= \int_0^1 t^{n-1}\frac{t(1-t)}{\sin \pi t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[(t^n - t^{n+1})\log\tan\frac{\pi}{2}t\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(nt^{n-1} - (n+1)t^n\right)\log\tan\frac{\pi}{2}tdt \\
&= (n+1)2^{n+1}B_n - n2^nB_{n-1}
\end{aligned}$$

が成立する。また、 $I_k(n) \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{2^n}{n!\pi^{n+2}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cos 2(2k+1)xdx$ とすると、

$$\begin{aligned}
B_n &= -\frac{2}{\pi^{n+2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cos 2(2k+1)xdx \\
&= -\frac{n!}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}I_k(n).
\end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned}
I_n(k) &= \frac{2^n}{n!\pi^{n+2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n\cos 2(2k+1)xdx \\
&= \frac{2^{n-1}}{n!\pi^{n+2}}\frac{1}{2k+1}\left[x^n\sin 2(2k+1)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2^{n-1}}{(n-1)!\pi^{n+2}}\frac{1}{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\sin 2(2k+1)xdx \\
&= \frac{2^{n-2}}{(n-1)!\pi^{n+2}}\frac{1}{(2k+1)^2}\left[x^{n-1}\cos 2(2k+1)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad - \frac{2^{n-2}}{(n-2)!\pi^{n+2}}\frac{1}{(2k+1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2}\cos 2(2k+1)xdx \\
&= -\frac{1}{2(n-1)!\pi^3}\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2\pi^2}I_k(n-2).
\end{aligned}$$

この漸化式により、 $I_k(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}\frac{(-1)^i}{2(n+1-2i)!\pi^{2i+1}}\frac{1}{(2k+1)^{2i}}$ が分かる。

この式を用いると、

$$\begin{aligned}
B_n &= -\frac{n!}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}\frac{(-1)^i}{2(n+1-2i)!\pi^{2i+1}}\frac{1}{(2k+1)^{2i+1}} \\
&= -\frac{n!}{2^n}\sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}\frac{(-1)^i}{(n+1-2i)!\pi^{2i+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2i+1}} \\
&= -\frac{n!}{2^n}\sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}\frac{(-1)^i}{(n+1-2i)!}\left(1 - \frac{1}{2^{2i+1}}\right)\frac{\zeta(2i+1)}{\pi^{2i+1}}.
\end{aligned}$$

したがって、 $p_{n,k} = \dfrac{4k(-1)^kn!}{(n+1-2k)!}\left(1 - \dfrac{1}{2^{2k+1}}\right)$ が条件を満たす。 □

3.1　定理 1.1 の証明

定理 3.4. (=定理 1.1) 正整数 n と非負整数 m に対し以下を満たす長さ $n+m$ の有理数列 $c_{n,m}$ が存在する。

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2m}}{\operatorname{artanh}^n x}dx = \sum_{k=1}^{n+m+1} c_{n,m,k}\frac{\zeta(2k+1)}{\pi^{2k}}.$$

証明. 任意の $0 \le i \le 2m+n-1$ を満たす整数 i に対し $2m+n-1$ 次整数係数多項式 $Q^1_{n,m,i}$ が存在し、

$$g_{m,n}(x+i) = Q^1_{n,m,i}(x)\frac{x(1-x)}{\sin \pi x}$$

が成立する。また、 $2m+2n-2$ 次有理数係数多項式 $Q^2_{n,m}$ を

$$Q^2_{n,m}(x) = \frac{2^n}{(n+2m)!}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^k n \sum_{0\le i\le j<n}\frac{(-1)^j}{j!(n-j)!}(k-j+x)^{n-1}Q^1_{n,m,j+k}(x)$$

と定義すると、補題 3.1 と補題 3.2 より、

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^{n+2m}}{\operatorname{artanh}^n x}dx \\
=&\frac{2^n}{(n+2m)!}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^k \int_{[0,1]^n} g_{m,n}(\Sigma t+k)dt_1dt_2\dots dt_n \\
=&\frac{2^n}{(n+2m)!}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^k n \sum_{0\le i\le j<n}\frac{(-1)^j}{j!(n-j)!}\int_0^1 (k-j+x)^{n-1}g_{m,n}(x+j+k)dx \\
=&\frac{2^n}{(n+2m)!}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^k n \sum_{0\le i\le j<n}\frac{(-1)^j}{j!(n-j)!}\int_0^1 (k-j+x)^{n-1}Q^1_{n,m,j+k}(x)\frac{x(1-x)}{\sin\pi x}dx \\
=&\int_0^1 Q^2_{n,m}(x)\frac{x(1-x)}{\sin \pi x}dx.
\end{aligned}$$

したがって、補題 3.3 より、ある $\left\lfloor \frac{(2n+2m-1)+1}{2} \right\rfloor = n+m$ 次有理数係数数列 $c_{n,m}$ が存在し、

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2m}}{\operatorname{artanh} x}dx = \sum_{k=1}^{n+m} c_{n,m,k}\frac{\zeta(2k+1)}{\pi^{2k}}$$

が成立する。 □

3.2 余談

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2m}}{\operatorname{artanh}^n x}dx$ という積分が $\dfrac{\zeta(2k+1)}{\pi^{2k}}$ $(k=0,1,\ldots)$ という値の有理数係数和で表せることのみ証明したが、実際には非常に煩雑にはなるが閉じた式で表すことができる。そこで、 n,m を入力として与えた際にこの積分の値を返すようなプログラムを Python で作成した[*1]。

このプログラムにより、例えば

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^{60}}{\operatorname{artanh}^{20} x}dx \\
&= 2802580304800447052059053743888763925582400\frac{\zeta(81)}{\pi^{80}} \\
&\quad - 7979815282418361503449779991484586975533200\frac{\zeta(79)}{\pi^{78}} \\
&\quad + \frac{32724018724838414638947064736852635494144880}{3}\frac{\zeta(77)}{\pi^{76}} \\
&\quad - \frac{28583522961066913358949733391482955998404352}{3}\frac{\zeta(75)}{\pi^{74}} \\
&\quad + \frac{89569415145108037293070788466805066619222592}{15}\frac{\zeta(73)}{\pi^{72}} \\
&\quad - \frac{77172596872902355647247664772699028532667920}{27}\frac{\zeta(71)}{\pi^{70}} \\
&\quad + \ldots
\end{aligned}
$$

といった式も計算できるようになる。

謝辞

今回の研究を進めるにあたり、研究部の皆さんに大変お世話になりました。特に、研究部の一期生である山口隼跳アントニオさんの研究が似た分野ということもあり良い刺激を受けました。また、興味深い問題を提供していただいた鈴木唯乃さん、研究部成果発表会でのスライドや本稿の構成に助言してくださった伊藤充洋さんにも深くお礼申し上げます。さらに、アドバイザーの川村花道さんから多様なアドバイスをいただき、それにより研究を大きく進められることができました。本当にありがとうございました。

[*1] `https://github.com/i20munetika/IntegralAlgorithm`