巨大基数に関する研究

大岩 知樹

2024 年 5 月

概要

弱到達不能基数は基数の数え上げを行う関数をうまく用いれば記述できるのではないかと思い研究を始めた.それはヴェブレン関数の考え方を基礎として成功した.その後これに関連して拡張という概念の形式化を行おうとした.

1. はじめに

“大きい”極限順序数を順序数崩壊関数で下から記述できるように、巨大基数というのも下から数え上げるような関数を作れるのではないかと考え研究を始めた.

2. 方法

所望の関数である、到達不能基数の定義である”正則な極限基数”と同値な条件を記述するような関数を目指して具体的に関数を定めて修正していった.以下に本研究で作成した関数を乗せる(一部抜粋).ここでは ZFC+I を仮定し、ICN は無限基数全体の集合を表すとする.

ⅰ)

$$\psi_0(n) := \aleph_n$$
$$\psi_a(b) := \mathrm{enum}\{c: \forall d<a(\psi_d(c)=c)\}(b) \quad (a>0)$$

ⅱ)

$$\psi_0(n) := \min\{a: \forall b<n(\mathrm{cf}(\psi_m(b))<\mathrm{cf}(a))\} \quad (n>0)$$
$$\psi_a(b) := \mathrm{enum}\{c: \forall d<a(\psi_d(c)=c)\}(b) \quad (a>0)$$
$$\psi_0(0) := 1$$

ⅲ)

$$\psi_m(n) = \min\{a: \forall b<n(\mathrm{cf}(\psi_m(b))<\mathrm{cf}(a))\} \quad (n\neq 0)$$
$$\psi_n(0) = \min\{a:\mathrm{cf}(a)=a \wedge \exists x \in \mathrm{ICN}(a=\sup(\bigcup_{k\in x}\psi_{n-1}(k)))\} \text{ (n:後続順序数)}$$
$$\psi_a(0) = \min\{b:\mathrm{cf}(b)=b \wedge \forall c<a(\mathrm{cf}(\psi_c(0))<\mathrm{cf}(b))\} \quad \text{(a:極限順序数)}$$
$$\psi_0(0) := 1$$

3. 結果

ⅰの関数

最初に考えた関数.ヴェブレン関数を和に閉じた順序数を数え上げる関数から無限基数を数え上げる関数に変更したもの.

任意の a,b について、$\psi_a(b)$は

1. a が後続順序数かつ b=0 の場合

$$\begin{cases} f(n+1) = \psi_{a-1}(f(n)) \\ f(1) = \psi_{a-1}(0) \end{cases}$$

2. b が極限順序数の場合

$$g(n) := \mathrm{enum}\{k : k \in X \wedge X = \min\{Y : Y \subseteq b \wedge \sup Y = b\}\}(n)$$

としたとき

$$f(n) = \psi_a(g(n))$$

3. a が極限順序数の場合

$$g(n) := \mathrm{enum}\{k : k \in X \wedge X = \min\{Y : Y \subseteq b \wedge \sup Y = a\}\}(n)$$

としたとき

$$f(n) = \psi_{g(n)}(b)$$

4. a と b がともに後続順序数の場合

$$\begin{cases} f(n+1) = \psi_{a-1}(f(n)) \\ f(1) = \psi_a(b-1)+1 \end{cases}$$

と関数 f をとれば$\psi_a(b)$は a+b+ω以下の列で$\psi_a(b)$と共終な列を作れてしまう.到達不能基数は正則な基数であるのでこのψ関数で到達不能基数を記述するには a,b の変数に到達不能基数を含めなければならなく、初期の目標は達成されていないと判断した.

この反省から下の(ⅱ)の関数が生まれた.

ⅱの関数

共終数が増えないのならば共終数を大きくしていく関数を作ればよいのではないかという発想から生まれた関数.この関数も正則基数を単に数え上げる関数であることから極限基数が出力されることはなく、到達不能基数を記述するには至らなかったが、この関数を研究したことによって成功例であるⅲの関数を作成することにつながった.

ⅲの関数

ⅱのような共終数が常に増加するような関数において、ほとんどの極限順序数αについて

$\psi_0(\alpha)$は cf($\psi_0(\alpha)$)>cf(α)を満たすことから、$\psi_0(\alpha)$は$\lim_{k\to\alpha}\psi_0(k)$より大きくなるという性質を研究した結果作成に至った関数.この関数により到達不能基数を記述することができるようになった.
このψ関数によって$\psi_1(0)$と表記される順序数が弱到達不能基数Ⅰと一致する.

証明
$\psi_1(0)$は正則基数であり、かつ正則基数の列の極限であるような最小の順序数と捉えることができる. また弱到達不能基数とは正則な極限基数という定義であるので、正則基数の列の極限で表される順序数ならば極限基数とであることを示せばよい.
ここで$\psi_1(0)$以下の正則基数はすべて後続基数であるより$\psi_1(0)$は後続基数の列の極限と言える.これより極限基数の定義から$\psi_1(0)$極限基数となる.

4. 考察と展望

ⅲの関数では$\psi_n(0)$で n 番目の到達不能基数を記述できる.さて、この関数を拡張したいと考えた時、$\psi_n(m)=\psi(0,n,m)$として以下のような三変数への拡張を考えることができる.

$\psi(n,0,0) := \min\{a:cf(a)=a \wedge \forall m<n\, \exists x \in LO(a=\bigcup_{k\in x}\psi(m,k,0)\}$ (n:後続順序数)
$\psi(a,0,0) := \min\{b:\forall c<a(cf(\psi(c,0,0))<cf(b))\}$ (a:極限順序数)
$\psi(a,m,n) = \min\{a:\forall b<n(cf(\psi_m(b))<cf(a))\}$ (n≠0)
$\psi(a,m,0) = \min\{d:cf(d)=d \wedge \exists x \in ICN(d=\sup(\bigcup_{k\in x}\psi(a,m-1,k)))\}$ (n:後続順序数)
$\psi(a,b,0) = \min\{c:cf(c)=c \wedge \forall d<b(cf(\psi(a,d,0))<cf(c))\}$ (b:極限順序数)
$\psi_0(0) := 1$

これは$\psi(1,0,0)$で最小の第一種到達不能基数をとる.同様の拡張で四変数、そして五変数にできる.更に n 変数関数の”n”を変更できるようにした$\psi(m|n)=\psi(m,0,0\cdots0,0)$(0 は n 個)という関数を考えることができる. しかし共終数と極限の組合せによって大きさを出すこの関数は、どのように拡張しても到達不能基数より本質的に大きい巨大基数であるマーロ基数は記述することができないだろうと予想していた.そこで”関数の拡張”とは一体どういうものなのかという疑問を持つに至った.
前記のψ関数は再帰的な定義を用いている.また、計算可能な関数を少量の初期関数で記述することのできる再帰関数に目をつけた.
これを用いて、例えば関数を再帰関数で表した形から関数の合成順を並び変えて、または定義内の関数を複製してできるような関数を元の関数から拡張することのできる関数と言ったらよいのではないかなど、何パターンかの関数の拡張に関する考察を行ったもののあまりうまくいっていないのが現状である.これについて明快な結論を出すことを課題とし、現在再帰理論を勉強中である.

謝辞

毎月のメンタリングでアドバイザーの市川航士郎さんをはじめ、私にこのような機会をくださった事務局の皆様、また他の研究部の皆様にも大変お世話になりました.ここに感謝申し上げます.

参考文献

[1] 山口人生, 到達不能基数について, 1982
[2] ケネス・キューネン, 集合論, 日本評論社, 2008
[2] 照井一成, 再帰関数論, 2011
[3] 田中一之, 数学基礎論序説 , 裳華房, 2019