音楽から見るコラッツ予想

N/S 高等学校研究部 数理科学グループ　丸山 優佳

1　はじめに

楽器の演奏において重要な音律や倍音のしくみが非常に興味深く，継続して調べてきました．この紀要は，昨年数理教育研究所のウェブサイトに掲載された「美しい旋律の構造とコラッツ数列の規則性の類似」[1] について再考し，紙面の都合で十分に伝えきれなかった「3 倍して 1 を足す」操作の極座標上での角度についてまとめ直したものです．

2　背景

2.1　コラッツ予想

リチャード・ガイ著『数論における未解決問題集』[2] より，コラッツ予想と呼ばれている問題は次のようなものです．

> L. Collatz は学生時代に $a_{n+1} = a_n/2$ (a_n 偶数)，$a_{n+1} = 3a_n + 1$ (a_n 奇数) で定義された整数列が，4, 2, 1, 4, . . . のサイクルを除けば，任意の整数 a_1 から出発してもいつかは $a_n = 1$ となるという意味で，“木ような構造” をもつかどうかを問題にした．

つまり，コラッツ予想は数列がループや発散をせず，有限回の操作で必ず 1 に到達するかという問題です．

2.2　整数倍音

フルートの音の成分をオシロスコープのアプリを用いて調べると，空気の振動を圧力の変化としてグラフで見ることができます．アプリには FFT アナライザの機能があり，1 つの音に対していくつもの整数倍音がスペクトルとして現れます．2 つの開口端は，歌口と，胴部管・足部管のキーの位置にあたり，フルートはそれぞれの運指に現れる 3 オクターブの音域の 1〜4 倍音を，息のコントロールで演奏する楽器といえます．

例えば，左手人差し指でキーを押さえた 2 オクターブ目のドを基音とした場合，2 倍音は 3 オクターブ目のド，3 倍音は 3 オクターブ目のソをハーモニクス奏法で演奏することができます．3 オクターブ目の基本の運指は，1・2 オクターブ音域と音質をそろえるために複雑になっています．3 オクターブ目の音域での細かい音の動きにおいて基本の運指で対応しきれない場合，3 倍音を用いたハーモニクス奏法を取り入れることで，音のつながりが滑らかになるときがあります．

このようにフルートの演奏において整数倍音を適切に用いることは，よりよい表現のための大切な技術だと考えられます．

2.3　旋律の音律　ピタゴラス音律

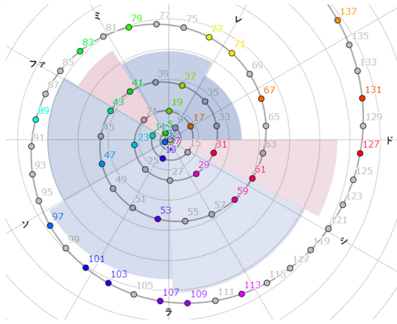


図 1: ピタゴラス音律

フルートの 1 音に現れる整数倍音を音の規則に従って極座標で表すと，対数螺旋に沿って等間隔に並んでいます．この規則性を用いると，全ての正の実数は音と対応させることができます．

対数螺旋の式は，

$$r = 2^{\frac{1}{2\pi}\theta} \tag{1}$$

と表せます．

ピタゴラス音律は 2 : 3 の調和する周波数比を用いて，1 オクターブを 5 つの全音と 2 つの半音の 7 音で区切った音律です．

$$\left(\frac{9}{8}\right)^5 \times \left(\frac{256}{243}\right)^2 = 2 \tag{2}$$

全音・半音がそれぞれ一定の比率でつながり，1 オクターブを 1 : 2 の完全 8 度で閉じることができます．

私の姉の楽器の製造元である村松フルート製作所では，楽器の設計は気温 25°C を想定しているそうなので，簡単に計算してみると，音速 V は，

$$V = 331.5 + 0.6 \times 25 = 346.5\,[m/s] \tag{3}$$

となります．

ハ長調のピタゴラス音律を表 1 のように計算すると，図 1 のように角度として表すことができます．

表 1: ラ = 442 Hz を基準としたときのハ長調のピタゴラス音律（波長は気温 25°C）

音	周波数比	振動数 [Hz]	波長 [m]	対数関数 $\log_2 M$	$= p$	$\theta = 360p$ [°]	$\theta = 2\pi p$ [rad]	平均律との比較 [cent]
ド	1	261.93	1.3229	$\log_2 1$	$= 0$	0	0	0
レ	9/8	294.67	1.1759	$\log_2 9/8$	$= 0.1699$	61.17	$2\pi(\log_2 9 - 3)$	+3.91
ミ	81/64	331.50	1.0452	$\log_2 81/64$	$= 0.3399$	122.35	$2\pi(\log_2 81 - 6)$	+7.82
ファ	4/3	349.23	0.9922	$\log_2 4/3$	$= 0.4150$	149.41	$2\pi(2 - \log_2 3)$	−1.96
ソ	3/2	392.89	0.8819	$\log_2 3/2$	$= 0.5850$	210.59	$2\pi(\log_2 3 - 1)$	+1.96
ラ	27/16	442	0.7839	$\log_2 27/16$	$= 0.7549$	271.76	$2\pi(\log_2 27 - 4)$	+5.87
シ	243/128	497.25	0.6968	$\log_2 243/128$	$= 0.9248$	332.93	$2\pi(\log_2 243 - 7)$	+9.78
ド	2	523.85	0.6614	$\log_2 2$	$= 1$	360	2π	0

3　方法

表 1 で示したように，対数関数を 360 倍すると度数法で，2π 倍すると弧度法で表現することができます．よって，この研究では対数を角度として表しています．

3.1　÷2 の角度

$\times 2$，$\div 2$ のオクターブ変化は，図 2 (a) のように極と 2^m を結ぶ半直線上にあるため，偏角が変わらないことが分かります．

m オクターブ高い音は，

$$m = \log_2 2^m \tag{4}$$

m オクターブ低い音は，

$$-m = -\log_2 2^m \tag{5}$$

と表すことができます．

3.2　×3 の角度

3 倍音は 1 オクターブと完全 5 度の音程です．1 オクターブは 360 度なので，完全 5 度について考えると，

$$360\,(\log_2 3 - 1) = 360 \times 0.5849625\cdots = 210.59\ldots \tag{6}$$

となり，図 2 (b) のように反時計回りに約 210.6 度となります．

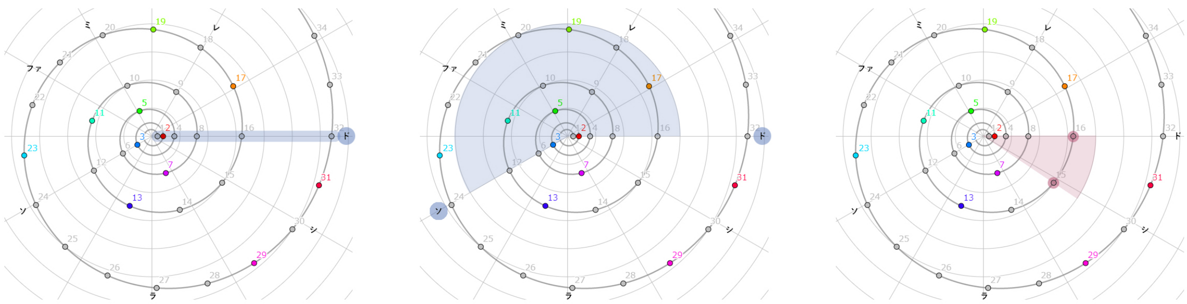
3.3　+1 の角度

+1 は，すべての数で角度が異なります．

例えば，$15+1$ の $+1$ を表したいとき，その角度は 15 と 16 の差になり，

$$\log_2 16 - \log_2 15 = \log_2 \frac{16}{15} \tag{7}$$

と表すことができ，図 2 (c) の角度となります．



(a) ÷2 のオクターブ変化　(b) ×3 の完全 5 度の角度　(c) 15 + 1 の角度

図 2: ÷3, ×3, +1 の操作

4　結果

正の整数 N に対して，偶数なら 2 で割り，奇数なら 3 倍して 1 を足すという操作をくり返すと，角度がどのように変化していくのか調べました．

4.1　交互に現れる $\times 3$ と $+1$

$\blacktriangleright$ は $\times 3+1$，$\rightarrow$ は $\div 2$ を表しています．

$$\boxed{3 \;\blacktriangleright\; 10 \rightarrow 5 \;\blacktriangleright\; 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1}$$

$N=3$ のとき，初期位相は，

$$\log_2 3 \tag{8}$$

となり，図 3 (a) の緑色の偏角です．

1 回目の $\times 3$ は図 3 (b) の青，$+1$ は図 3 (c) の赤の角度と表すことができます．ここまでの偏角を式で表すと，

$$\log_2 3+\log_2 3+\log_2 \frac{10}{9}=1+\log_2 5 \tag{9}$$

となります．次の $\div 2$ は 1 オクターブの変化です．

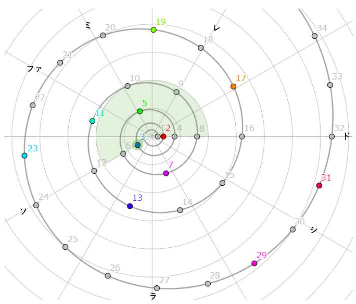
$$1+\log_2 5-1=\log_2 5 \tag{10}$$

さらに，2 回目の $\times 3$，$+1$ を表すと，それぞれ図 3 (d) の青と (e) の赤の角度になります．

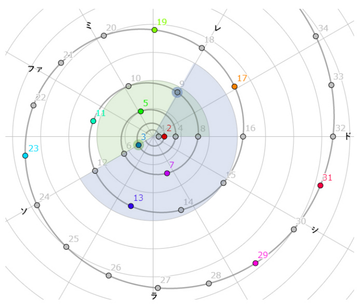
式 (10) から続けて 2 回目の $\times 3+1$ を計算すると，

$$\log_2 5+\log_2 3+\log_2 \frac{16}{15}=\log_2 2^4=4 \tag{11}$$

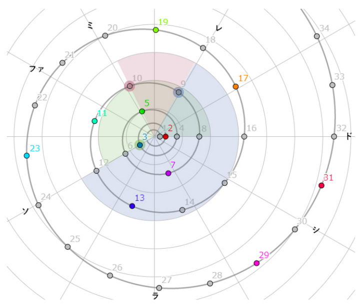
となります．整数 4 は 1 の 4 オクターブ上という意味なので，$N=3$ のコラッツ数列は 1 に到達することがわかります．



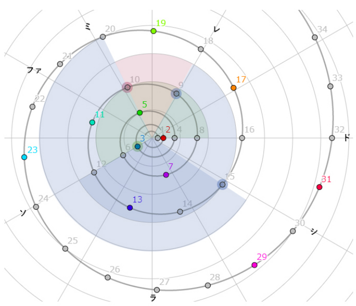
(a) 緑：初期位相 $N=3$



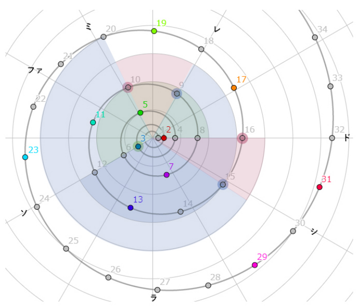
(b) 青：1 回目の $\times 3$



(c) 赤：1 回目の $+1$（$9+1$）



(d) 青：2 回目の $\times 3$



(e) 赤：2 回目の $+1$（$15+1$）

図 3: $N=3$ のコラッツ数列の操作

4.2 ×3 と +1 をまとまりとして考える

それぞれの角度が分かるなら，交互に現れる青と赤の順番を入れ替えて，青のまとまりと赤のまとまりとして考えることができます．

もう一度 $N = 3$ について考えてみると，初期位相 $N = 3$ に，2 回分の $\times 3$ の角度を表したものが，図 4 (a)〜(c) です．図 4 (a) の緑の $N = 3$ は，1 をドとしたとき完全 5 度のピタゴラス音律のソの音になり，それを 3 倍した図 4 (b) の 9 はピタゴラス音律のレの音になります．さらに図 4 (c) の 2 回目の $\times 3$ の 27 はピタゴラス音律のラの音になります．

初期位相 3 と 2 回分の $\times 3$ を式で表すと，

$$\log_2 3 + \log_2 3^2 = \log_2 3^3 \tag{12}$$

と表すことができます．

次に，2 回分の $+1$ について考えます．図 4 (d) の 1 つ目の $+1$ は，9 から 10 の角度でしたが，それは 27 から 30 の角度と等しくなります．

$$\log_2 \frac{10}{9} = \log_2 \frac{30}{27} \tag{13}$$

図 4 (e) の 2 つ目の $+1$ は，15 から 16 の角度なので，2 回分の $+1$ を合わせた角度は次のように表すことができます．

$$\log_2 \frac{10}{9} + \log_2 \frac{16}{15} = \log_2 \frac{2 \times 2^4}{3^2 \times 3} = \log_2 \frac{2^5}{3^3} \tag{14}$$

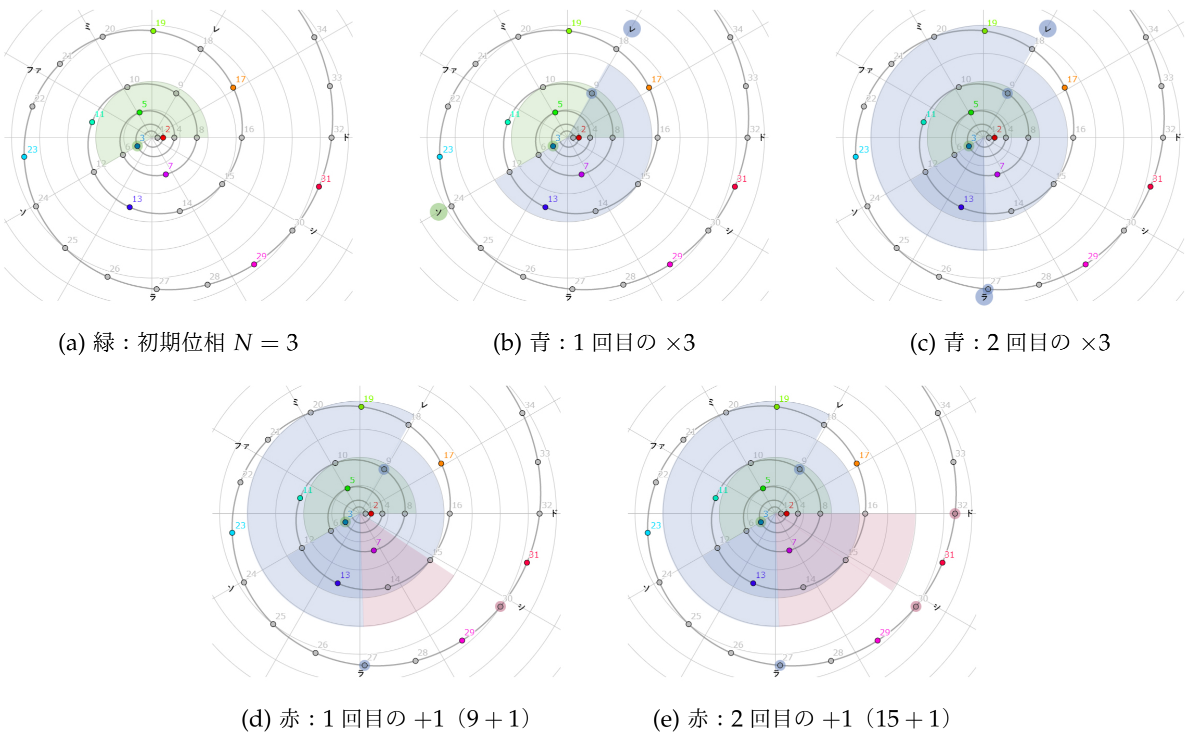
分子の 10 と分母の 15 は 2 : 3 の完全 5 度の音程になっていますが，これはどのような N でも，どれほどステップ数が大きくなっても，この斜めの数は $2^m : 3$ の完全 5 度の音程です．

緑と青の式 (12) と 赤の式 (14) を合わせると，

$$\log_2 3^3 + \log_2 \frac{2^5}{3^3} = \log_2 2^5 = 5 \tag{15}$$

となり，整数 5 は 1 の 5 オクターブ上という意味なので，1 に到達するとわかります．

このように，青と赤はそれぞれのまとまりとして考えることができ，途切れることなく連なっています．



(a) 緑：初期位相 $N = 3$　(b) 青：1 回目の $\times 3$　(c) 青：2 回目の $\times 3$

(d) 赤：1 回目の $+1$（$9 + 1$）　(e) 赤：2 回目の $+1$（$15 + 1$）

図 4: 初期位相 N，$\times 3$ の青のまとまり，$+1$ の赤のまとまり

5　おわりに

5.1　結論

コラッツ数列が 1 に到達するときのすべての式は，次のようになります．$N \times 3^n$ と，n 個の $+1$ を合わせた偏角は，

$$\log_2 N \cdot 3^n + \log_2 \frac{2^m}{N \cdot 3^n} \tag{16}$$

と表すことができます．1 に到達するコラッツ数列は，最後の $+1$ の角度で $\log_2 2^m$ になることがわかりました．

音楽では，旋律の 1 音目は主音だけではなくさまざまな音が用いられますが，曲の終わりは主音と主和音で閉じることから，コラッツ数列は旋律のピタゴラス音律の構造にとてもよく似ているといえます．実際，図の青で示した $\times 3^n$ の音程はピタゴラス音律の全音のようです．また，赤で示した $+1$ の角度はピタゴラス音律の半音のような役割をしているように見えます．$\times 3$ を重ねるだけでは決して閉じることがないオクターブを，半音を組み合わせることで自然音階が $1:2$ のオクターブで閉じたり，曲を主音で閉じたりするように，コラッツ数列を 1 に到達させるためのはたらきをしているようです．

今後の課題としては，ループや発散についてまだ十分に調べられていないので，さらに研究が必要だと考えています．

5.2　感想

アラン・コルノーの映画『めぐり逢う朝』では，マラン・マレ作曲 Les Folies d'Espagne の演奏場面がとても美しく描かれています．この曲は，現代でもフルートやチェロの独奏で演奏され愛されています．

映画で用いられるヴィオラ・ダ・ガンバという楽器のヘッドには，人の頭部の彫刻が施されていますが，今日のヴァイオリンなどの弦楽器のネックの先端はスクロールという渦巻きです．マラン・マレの時代の数学者ヤコブ・ベルヌーイは対数螺旋の研究をしたことで有名ですが，ヴァイオリンの渦巻きの形状は $r = 2^{\frac{1}{2\pi}\theta}$ で表される約 3 オクターブ音域の倍音の対数螺旋にとてもよく似ている気がします．音律や倍音，対数を用いたコラッツ予想の研究をしてきましたが，音楽と数学のつながりが楽器の細部にも現れているようで，とても奥深いなと思いました．

参考文献

[1] 丸山優佳. "美しい旋律の構造とコラッツ数列の規則性の類似". 算数・数学の自由研究 2023 年度受賞作品. 一般財団法人理数教育研究所. https://www.rimse.or.jp/research/past/winner11th.html, (参照 2024-5-31).

[2] リチャード・ガイ. 数論における未解決問題集. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990.