

Wittgenstein Briquet パズルの NP 困難性

五十嵐 健悟

概要

今まで多くのゲームやパズルが、世界中の人々によって作成され、楽しまれてきた。その 1 つが Wittgenstein Briquet (デスクプレース) である。数学者・計算機科学者によって計算量が解析されているパズルが多く存在する中、このパズルは 20 年以上前にその原型となるパズルが全日本パズル選手権 (JPC) で出題されていたにも関わらず、その計算複雑性に関しては (私の調べる限り) 未解明であった。本論文では、Wittgenstein Briquet パズルを部分的に拡張し、その拡張されたパズルを解く行為が NP 困難、つまりコンピュータで解くのに時間がかかることを証明する。

1 はじめに

今日、数多のボードゲーム・パズルゲームが世界中で作成され、解かれ、楽しられている。数独やクロスワードは、その最たる例だろう。現在この 2 つは、様々な場面でお目にかかることの多い、最も有名なパズルのうちの一つである。数独やクロスワードのように、図が与えられ、その図に書き込むことで解答を得る形式を持つパズルをペンシルパズルと呼ぶ。

ペンシルパズルは、しばしば計算論の領域で研究対象となっている。その中でも特に研究者の興味を引くのが時間計算量であり、NP 困難性が主に議論される。今までに、スリザーリンク [1]、LITS[2]、ののぐらむ [3]、タタミバリ [4] などのペンシルパズルの NP 困難性が示されてきている。

NP 困難性は、問題の難しさの指標の 1 つである。NP と呼ばれる問題の集合 (クラス) があり、NP の中に、コンピュータが解くのに超多項式時間を要す

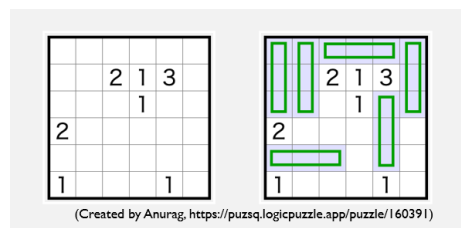


図 1 デスクプレースパズルの盤面 (左) とその解 (右)

る問題、つまりコンピュータにとって「難しい」問題が含まれているかどうかは、100 万ドルの賞金がかけられるほどの重要な未解決問題である ($P \neq NP$ 問題という)。そして、ある問題が NP 困難である、というのは、NP に包含される全ての問題から、その問題への、多項式時間還元が存在すること、つまり、NP に包含される全ての問題よりも「難しい」ことをいう。NP 困難問題の中で、多項式時間で解けると判明したものは、計算機科学の歴史上 1 つも存在しない。つまり、ある問題が NP 困難である、というのは、その問題を解くのに超多項式時間を要することを示唆していると推測することができるため、NP 困難性は問題の難しさの指標として重要な役割を果たす。

本論文にて考えるパズルは、Wittgenstein Briquet、日本ではしばしばデスクプレースと呼ばれるパズルである。解答者には、 $m \times n$ の、一部のマスに 0 以上 4 以下の数字が書かれているグリッドが渡される。解答者は、これらのルールに従って、 1×3 、または 3×1 サイズの机 (図に於いては緑色の四角形) を記入する。

1. 机同士が重なってはならない
2. マスに書かれた数字が、そのマスに隣接する (最大) 4 マスのうち、机が置かれるマスの数を

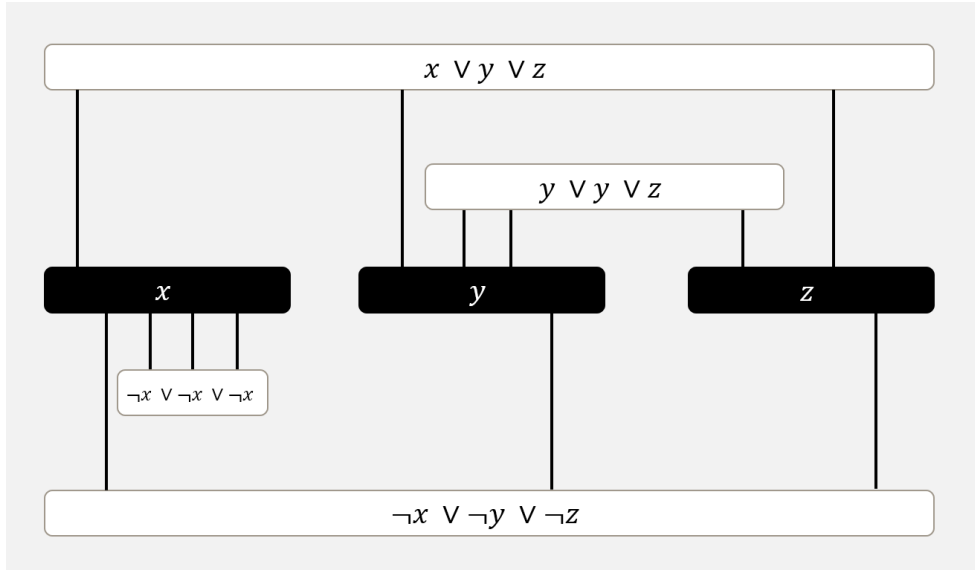


図2 Planar Rectilinear Monotone 3SAT における、 $(x \vee y \vee z) \wedge (y \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg x \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$ の平面埋め込み。

表すようにする。

3. 数字の書かれたマスに机を置いてはならない
4. 机の置かれていないすべてのマス（数字のマスを含む）は、タテヨコにひとつつながりになるようにする。

このパズルが NP 困難であることは既に証明し、電気通信学会にて発表している。[6]。本紀要では、机のサイズを $m \times n$ ($2 \leq m, 2m + 2 \leq n$) としても NP 困難性が保たれることを証明する。

2 Planar Rectilinear Monotone 3SAT

本紀要では、Planar Rectilinear Monotone 3SAT から Wittgenstein Briquet パズルへの多項式時間写像還元を構成することで、Wittgenstein Briquet パズルの NP 困難性を示す。

Planar Rectilinear Monotone 3SAT は、3SAT の亜種で、平面埋め込み可能な 3CNF 式とその平面埋め込みのうち、3CNF の節内のリテラルが全て正であるかすべて負であり、平面埋め込みが以下の 2つを満たすものである [8]^{*1}。

1. 平面埋め込みが Rectilinear Embedding になっている。（節を表す頂点が水平な直線として表され、節内にあるリテラルを表す頂点と垂直な直線でつながっている。）
2. リテラルが正の節のすべてがリテラルを表す頂点に対して片側におかれ、リテラルが負の節のすべてがそれとは反対側に置かれる。

例として、図 2 に Planar Rectilinear Monotone 3SAT における平面埋め込みの例を示した。正のリテラルを持つ節が変数の上側に置かれ、負のリテラルを持つ節は変数の下側に置かれている。

Planar Rectilinear Monotone 3SAT 問題は NP 完全であることが知られている。

3 還元手法

以下に本研究で用いた還元を示す。Planar Rectilinear Monotone 3SAT からの多項式時間還元を実現するため、私は Wire Gadget、Variable Gadget、Clause Gadget という 3つの Gadget を構成した。Wire Gadget は節と変数をつなぐ辺の挙動、Variable Gadget は変数の挙動、Clause Gadget は節の挙動をそれぞれ再現する。また、Gadget の図

^{*1} この pdf では、Restricted Planar Monotone 3SAT として紹介されている。

では、複数のマスに同じ数字が記される場合は、マスを結合して数字を1回のみ記述することで省略する。また、 $m \times n$ のグリッド、つまり机がちょうど1つ配置できる分のグリッドを白抜きの長方形で省略し、机の配置される部分を緑色で塗りつぶして表現している（図3）。

3.1 Wire Gadget

Wire Gadget を図4に示す。このGadgetの解はリテラルが真の節に接続するWireの場合、図5のようになる。リテラルが負の節に接続している場合は、上下反転したものがそのまま解になる。また、他のGadgetを回避しつつWireをつなげるためにWireの平行移動が必要になる。平行移動のためのGadgetは図6のようになる。

3.2 Variable Gadget

Variable Gadget を図7に示す。このGadgetの解はこのGadgetが表す変数の値が *True* のとき、図8のようになる。変数の値が *False* のとき、解は図8の解をそのまま反転したものとなる。

3.3 Clause Gadget

OR回路を表す Or Gadget を Wire のようなもので2つつなげることで、Clause Gadget を構成する。Or Gadget は図9のような形で、解は図10、図11、図12、図13のようになる。ここで、Or Gadget の上部の出力部分から単に Wire をつなげるだけでは、2つ目の Or Gadget に Variable Gadget から直接伸びた Wire、Or Gadget の出力部分から伸びた Wire の2つつなげるにあたって、2つの Wire の上端の高さが合わない可能性がある。そこで図14のようなGadgetと前出の Wire Gadget を組み合わせ、1マス単位で Wire の長さを調節し、上端の高さを合わせる。最後に、2つ目の Or Gadget の出力が *False* のとき解が存在しないようにするために、図15のようなGadgetを接合し、そこで Clause Gadget が完成する。

この方法で、 $m = 2, n = 6$ の場合の Clause Gadget を作ると図16のようになる。

3.4 還元の完成

Wire Gadget を用いて Clause Gadget と Variable Gadget を接合し、Gadget がない部分を0で

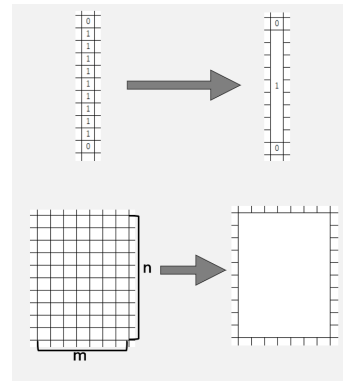


図3 略記法の例

埋め尽くすことで還元は完成する。（机の配置に埋める0が干渉しないように、Wireに接合していないVariable GadgetのWire接合部分は図17のように0で埋める。）

4 別解問題の NP 完全性について

ペンシルパズルの計算複雑性を考える上で重要なASP（別解問題）について触れる。

ASPは、Another Solution Problemの略で、日本語では別解問題と呼ばれる。ある問題に関する another solution problem(ASP)とは、もとの問題のインスタンスとそれに対する1個の解を入力にとり、それとは異なる解が存在するかどうかを判定する決定問題である。世間一般には、別解がないパズルが美しいとされてきている。よって、ASPについて考えることは、パズルを考えるにあたって非常に意義がある。スリザーリンク、LITS、ののぐらむなどのペンシルパズルのASPのNP困難性は示されてきた一方、タタミバリのよう未解決に終わっているものも存在する。

ASPを考えるにあたって、parsimonious還元と呼ばれる概念を理解する必要がある。parsimonious還元とは、解の数を保つような還元のことである。そして、ASPがNP困難である問題からその問題へのparsimonious還元が存在し、その2つの関数問題の解の集合の間に多項式時間計算可能な全単射な写像が存在すれば、その問題のASPもNP困難になる。

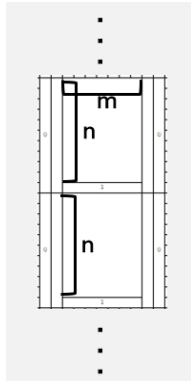


図4 Wire Gadget. 上図の盤面を垂直方向に繰り返すことによって Wire の挙動を再現する。また、リテラルが負の節に接続する場合は、上図を上下反転する。

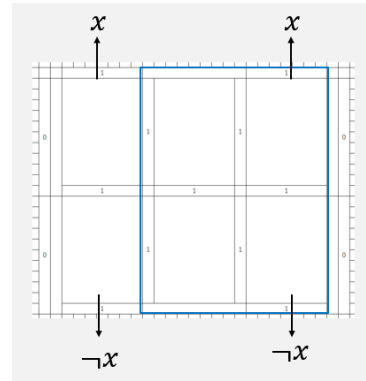


図7 Variable Gadget. 必要に応じて青枠部分を水平方向に繰り返す事によって、任意の本数 Wire を接続することができる。

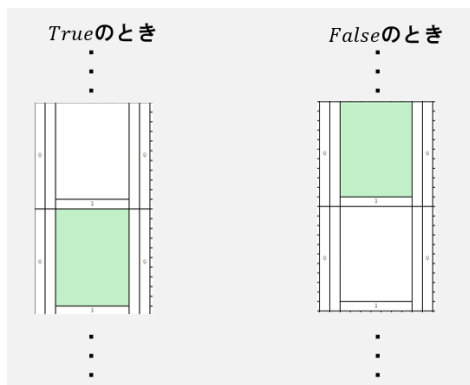


図5 Wire Gadget の解。リテラルが負の節に接続している場合は、いずれも上下反転したものが解になる。

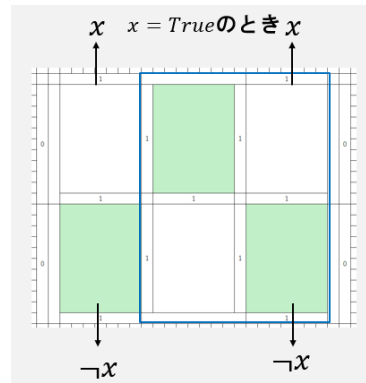


図8 Variable Gadget の解。 $x = False$ の場合は、上図を上下反転したものが解になる。

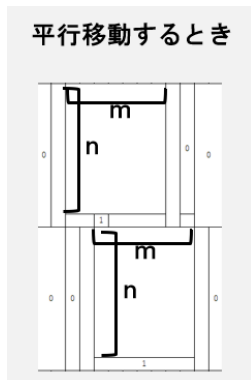


図6 Wire の平行移動

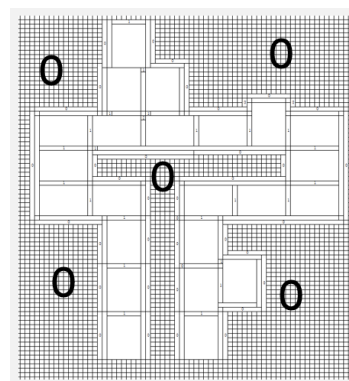


図9 Or Gadget. 下部の入力部分に Wire Gadget を接合することで機能し、上部の突出部分で出力を得る。

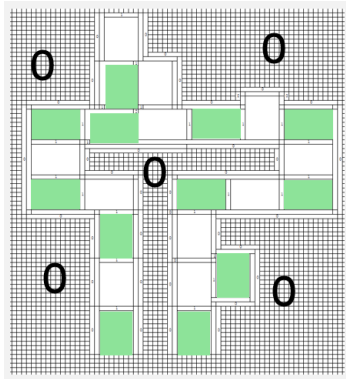


図 10 Or Gadget の解 ($True \vee True$ の場合)

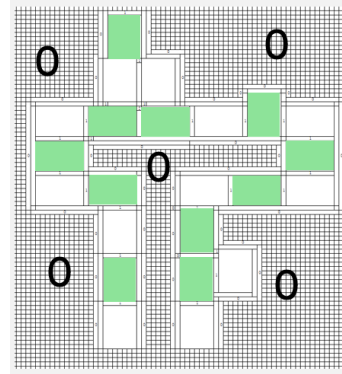


図 13 Or Gadget の解 ($False \vee False$ の場合)

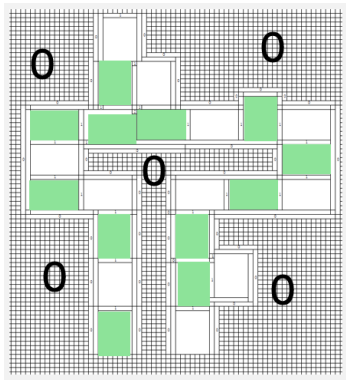


図 11 Or Gadget の解 ($True \vee False$ の場合)

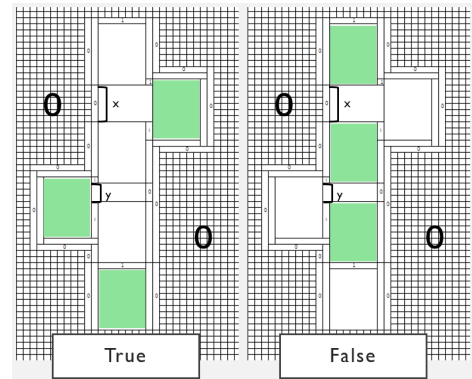


図 14 Or Gadget 同士を接合するための Gadget。 x, y は $1 \leq x, y \leq m$ の任意の整数。

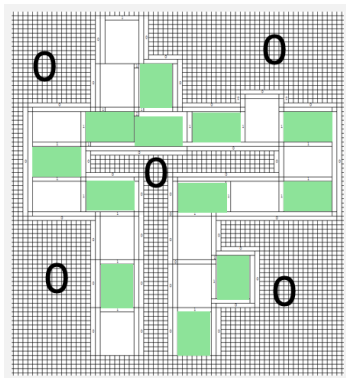


図 12 Or Gadget の解 ($False \vee True$ の場合)

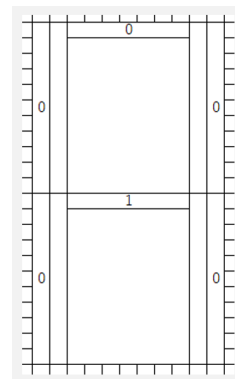


図 15 2 つ目の Or Gadget の出力部に結合される Gadget

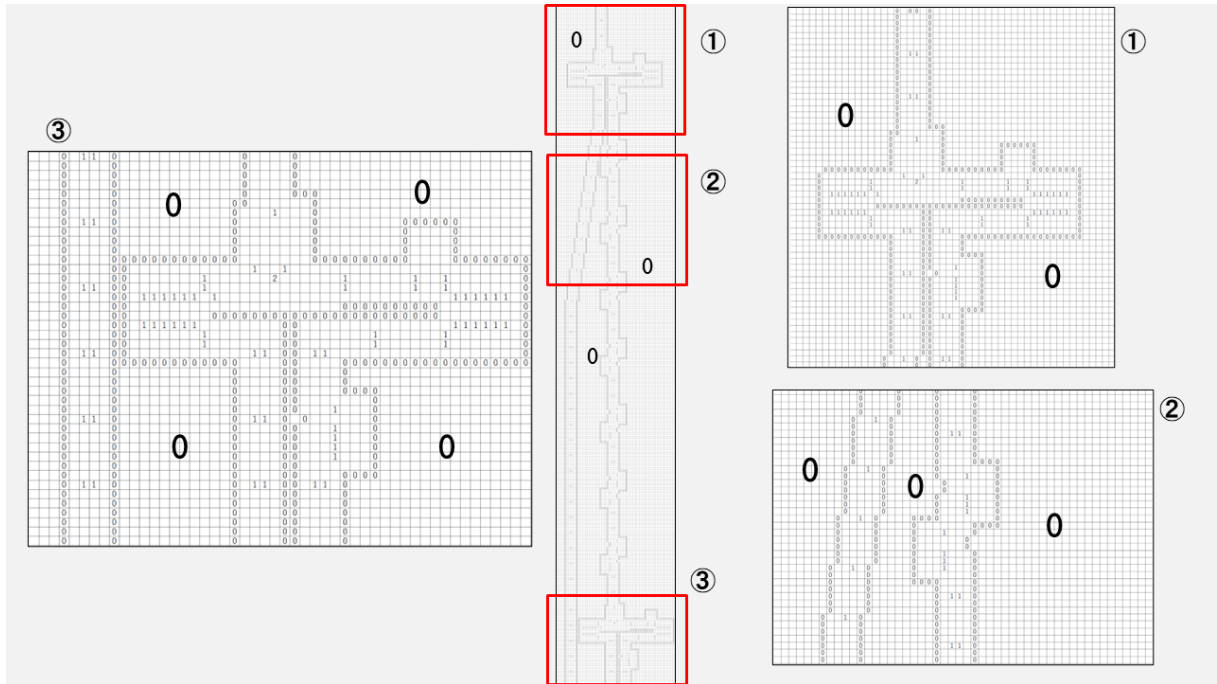


図 16 $m = 2, n = 6$ の場合の Clause Gadget。③が1つ目の Or Gadget、②が2つの Or Gadget を結合する Gadget、①が2つ目の Or Gadget である。

私がこの紀要で提示した還元は、1つの Planar Rectilinear Monotone 3SAT の解に対して1つのデスクプレースの解しか存在しない。つまり、この還元は parsimonious である。また、Planar Rectilinear Monotone 3SAT の ASP は NP 困難である [7]。したがって、デスクプレースの ASP も NP 困難である。

5 今後の展望

最後に今後の展望について触れる。まず、Wire Gadget の水平方向への移動を実現するために、この還元は $m=1$ の場合を除いている。また、OR Gadget の $False \vee False$ の場合において還元の障害となる解 (図 18) が発生してしまうために、 $n \geq 2m + 2$ の場合も除いて議論している。その制約を解くことが今後の課題となるだろう。

また、今回の還元では、3 という数字の書かれたマス一度も用いていない。したがって、マスに書かれる数字の種類が 0,1,2 のみという制約下でも NP 困難であることが示せている。しかしながら、

それ以外の制約 (例えば、1 のみ、0,2 のみなど) を課した場合の計算複雑性については未解明であるため、それについても今後考える余地がある。

参考文献

- [1] 八登崇之. (2000). スリザーリンクの NP 完全性について. 情報処理学会研究報告= IPSJ SIG technical reports, 2000(84), 25-31
- [2] Biro, M., & Schmidt, C. (2017, April). Computational complexity and bounds for Norinori and LITS. In Proc. 33rd European Workshop on Computational Geometry, Malmö, Sweden (pp. 29-32).
- [3] Ueda, N., & Nagao, T. (1996). NP-completeness results for NONOGRAM via parsimonious reductions. preprint.
- [4] Adler, A., Bosboom, J. W., Demaine, E. D., Demaine, M. L., Liu, Q. C., & Lynch, J. R. (2020). Tatamibari is NP-complete.
- [5] Serkan Yurekli: Wittgenstein Briquet,

<https://yureklis.wordpress.com/2012/06/03/wittgenstein-briquet/>, Accessed November 11th, 2025.

- [6] 五十嵐 健悟; 「デスクブレース (Wittgenstein Briquet) パズルの NP 困難性」 信学技報, vol. 125, no. 277, COMP2025-19, pp. 37-43, 2025 年 12 月.
- [7] Demaine, E. D. (2014). MIT 6.890: Algorithmic Lower Bounds: Fun with Hardness Proofs (Fall 2014), Lecture 15 Scribe Notes. <https://courses.csail.mit.edu/6.890/fall14/scribe/lec15.pdf>, Accessed May 26th, 2026.
- [8] Tippenhauer, S., & Muzler, W. (2016). On planar 3-SAT and its variants. Fachbereich Mathematik und Informatik der Freien Universität Berlin.

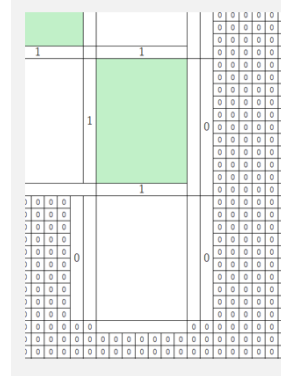


図 17 机の配置に埋める 0 が干渉しないように、Wire に接合していない Variable Gadget の Wire 接合部分を図のように回避して埋める。

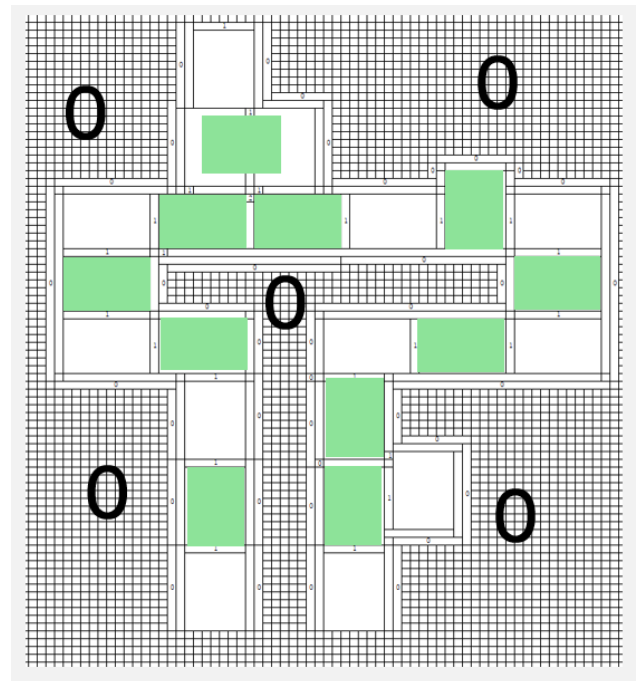


図 18 $n \geq 2m + 2$ の場合、Or Gadget に、図のような、 $False \vee False$ で $True$ を伝播する解が存在する。