

$\mathbb{R}^2$ における回転と鏡映による群の表現

中学三年 渡邊倅成

概要

本稿では、群の表現を「線形空間での図形の動きと群の元の対応」として捉える。具体的に、 $\mathrm{SO}(2) \cdot \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の $\mathbb{R}^2$ での行列による忠実な表現について考察した上で、この二つの群の外部半直積として生成される $\mathrm{O}(2)$ についても群の表現の視点から証明する。

目次

1	はじめに	1
2	群とは	1
3	線形変換と群の表現	2
4	$\mathrm{SO}(2)$ の行列による表現	2
5	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の行列による表現	3
6	$\mathrm{SO}(2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathrm{O}(2)$ とその証明	5
7	複素平面での表現への展望	6

1 はじめに

群という概念は、対称性を記述するための基本的な道具であり、数学や物理の多くの場面に現れる。一方で、群はしばしば抽象的に定義されるため、その構造を直接イメージすることは難しい。群の表現は、このような抽象的な構造を、線形空間上の変換として具体的に表す方法である。これにより、群の作用を行列や線形写像として扱うことができ、複雑な群の性質をより見通しよく理解することが可能になる。本稿では、具体例を交えながら群とその表現について議論を展開する。

2 群とは

定義 2.1 (群). 集合 G とその上の演算 $f: G \times G \rightarrow G$ 、元 $e \in G$ 、写像 $^{-1}: G \rightarrow G$ との成す構造 $(G; \times, e, ^{-1})$ が群であるとは、

1. 任意の $a, b, c \in G$ に対して $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ が成り立つ。
2. 任意の $a \in G$ に対して $a \times e = e \times a = a$ である。
3. 任意の $a \in G$ に対して $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$ である。

これらを満たす時、集合 G には群の構造が入るという。

例 2.1 ($O(2)$). 線形空間 $\mathbb{R}^2$ の中で、 $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ ($x, y \in \mathbb{R}^2$) を満たす線形変換 A 全体の集合を考える。この集合は群をなす。これは $O(2)$ と呼ばれている。

$$O(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$$

例 2.2 ($SO(2)$). $O(2)$ の元に $\det A = 1$ という条件を追加した群。これは $SO(2)$ ^{*1} と呼ばれており、アーベル群である。

$$SO(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid AA^T = I, \det A = 1\}$$

例 2.3 ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). 群 $\mathbb{Z}$ の $2\mathbb{Z}$ による剰余類は次のようになる^{*2}。

$$\mathbb{Z} = (0 + 2\mathbb{Z}) \cup (1 + 2\mathbb{Z})$$

ここで $(0 + 2\mathbb{Z}) = [0], (1 + 2\mathbb{Z}) = [1]$ を群の元とし、演算を $\mathbb{Z}$ での加法とするような集合 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} := \{[0], [1]\}$ は群をなす。またこの群は有限巡回群であるため、アーベル群である。

例 2.4 ($GL(n, K)$). 体 K 上の n 次正方行列のうち、逆行列をもつものの全体の集合。すなわち

$$GL(n, K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\}.$$

この集合は行列の積に関して群をなす。

3 線形変換と群の表現

実数平面 $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換は、 2×2 行列によって一意的に表せる。特に、二つの線形変換を続けて行うことは、対応する行列の積として表される。したがって、変換の合成を調べることは、行列の積を調べることと対応している。

次に群の表現を定義する。体 K 上の n 次元での群 G の表現とは、 $\varphi: G \rightarrow GL(n, K)$ が定義でき、 $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ という群準同型写像を充足する写像のことである。

これらの定義より本稿では群の表現を「群論と線形代数間での橋渡し」として解釈する。

4 $SO(2)$ の行列による表現

定理 4.1. $SO(2)$ の $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換による表現として現れる行列は、ある実数 θ を用いて

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と表されるものに限られる。

証明. 任意に $g \in SO(2)$ をとる。このとき、 $SO(2)$ の表現は $GL(2, \mathbb{R})$ に対して作用するので、 g は 2 次正方行列である。よって

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

^{*1} 本来この群は $U(1)$ と呼ばれているが、これは $\mathbb{C}$ 上での呼び方であるため本稿では $\mathbb{R}^2$ 上での呼び方である $SO(2)$ を使用する。

^{*2} $\mathbb{Z}$ はアーベル群であるため、左剰余類と右剰余類は一致する。

と書ける。SO(2) の定義より、 $gg^T = I$, $\det g = 1$ である。まず $gg^T = I$ より、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。したがって、 $a^2 + b^2 = 1, ac + bd = 0, c^2 + d^2 = 1$ が成り立つ。

ここで $a^2 + b^2 = 1$ より、ある実数 θ を用いて $a = \cos \theta, b = \sin \theta$ と書ける。

また、 $ac + bd = 0$ より、 $\cos \theta c + \sin \theta d = 0$ である。すなわち、ベクトル $(\cos \theta, \sin \theta)$ と (c, d) は直交し、さらに $c^2 + d^2 = 1$ であるから、

$$(c, d) = \left(\cos \left(\theta \pm \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta \pm \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

である。よって (i) と (ii) の場合分けが生じる。

(i)

$$(c, d) = \left(\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

のとき、 $(c, d) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ である。したがって、

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。このとき、 $\det g = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta (-\sin \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ である。よって条件に適合する。

(ii)

$$(c, d) = \left(\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

のとき、 $(c, d) = (\sin \theta, -\cos \theta)$ である。したがって、

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

となる。このとき、 $\det g = \cos \theta (-\cos \theta) - \sin \theta \sin \theta = -(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -1$ である。これは $\det g = 1$ に反する。よって不適合である。

(i),(ii) より、

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である。ここで θ は任意の変数であったため、 θ に $-\theta$ を代入すれば、

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と書ける。したがって、SO(2) の元はすべて回転行列 $R(\theta)$ として表される。□

5 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の行列による表現

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の表現は、SO(2) の標準的な回転表現の場合と異なり、表現空間や [1] の行き先の選び方によって、さまざまな行列による表現が存在する。そのため、一意的に一つの表現を定めることはできない。本節では、その中の基本的な例として、鏡映による表現を紹介する。

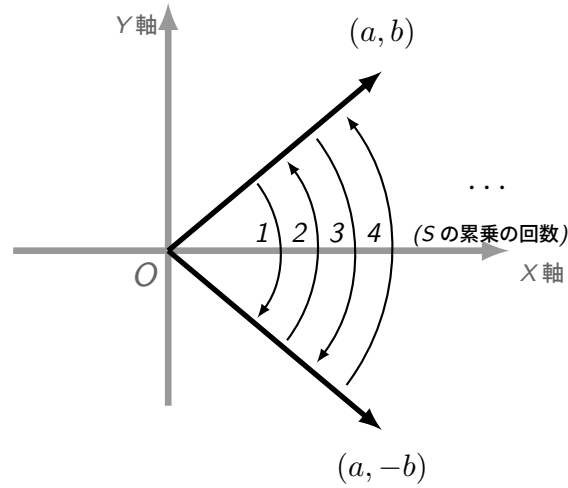
定義 5.1 (鏡映). 次の行列で表される線形変換 S を考える。

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

これは $\mathbb{R}^2$ でのベクトル (a, b) を

$$S(a, b) = (a, -b)$$

に移す変換であり、 x 軸に関する鏡映である (図 1)。



(図 1)

この表現により、以下の定理が成り立つ。

定理 5.1. 線形変換 S が生成する集合

$$\langle S \rangle = \{I, S\}$$

における演算を行列の積とすると、 $\langle S \rangle$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型な群である。したがって、

$$\lambda: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R}), \quad \lambda([0]) = I, \quad \lambda([1]) = S$$

は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の $\mathbb{R}^2$ 上の表現を与える。

証明. $S^2 = I$ より、任意の整数 $n, k \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$S^{2n} = I, \quad S^{2k+1} = S$$

であるため、 S を何度か掛けて得られる行列は I または S に限られる。したがって、 S が生成する集合は $\langle S \rangle = \{I, S\}$ である。この集合における行列の積は次の表で表される。

$\cdot$	I	S
I	I	S
S	S	I

一方、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0], [1]\}$ の加法は次の表で表される。

$+$	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$
$[1]$	$[1]$	$[0]$

ここで $[0]$ を I に、 $[1]$ を S に対応させると、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の加法表と $\langle S \rangle$ の積の表は一致する。よって $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle S \rangle$ である。さらに、対応 $\lambda([0]) = I, \lambda([1]) = S$ は $\lambda([a] + [b]) = \lambda([a])\lambda([b])$ を満たす。したがって λ は群準同型であり、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の行列による表現になっている。□

6 $\mathrm{SO}(2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathrm{O}(2)$ とその証明

定理 6.1.

$$\mathrm{O}(2) \cong \mathrm{SO}(2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

証明. まず、半直積の一般的な形を確認する。 $\mathrm{Aut}(G)$ を G から G 自身への同型写像全体がなす群とし、群 G, H と群準同型 $\varphi: H \rightarrow \mathrm{Aut}(G)$ が与えられたとき、半直積 $G \rtimes_{\varphi} H$ *3は積を次のように定める群である（集合としては $G \times H$ ）。

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1\varphi_{h_1}(g_2), h_1h_2)$$

ここでは半直積の定義より G を $\mathrm{SO}(2)$ に、 H を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に代入するものとする。

次に、このケースでの φ を考える。定義より、 $\varphi: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{SO}(2))$ を定めればよい。 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元を $0, 1$ と書き $A \in \mathrm{SO}(2)$ とすると、ここで用いる作用は $\varphi_0(A) = A, \varphi_1(A) = A^{-1}$ である。*4この作用を行列によって具体的に表すため、セクション 4, 5 で定めた $R(\theta), S$ を導入する。

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$A = R(\theta) \in \mathrm{SO}(2)$ に対して $SR(\theta)S = R(-\theta) = R(\theta)^{-1}$ である。したがって上の作用は、行列を用いれば $\varphi_0(A) = A, \varphi_1(A) = SAS$ と書ける。特に $\varphi_1^2 = \varphi_0$ が成り立つので、 φ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ から $\mathrm{Aut}(\mathrm{SO}(2))$ への群準同型である。

はじめに、任意の $\mathrm{O}(2)$ の元が回転、または回転と鏡映の積として表されることを示す。

$$\mathrm{O}(2) = \{A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid AA^T = I\}$$

より、 $\det A = \pm 1$ 。*5よって、 $\mathrm{O}(2)$ の元は $\det$ により二つの種類に分類できる。

(i) $\det A = 1$ の場合、この条件を満たすような元全体は、 $\mathrm{SO}(2)$ と一致する。セクション 4 より、 $\mathrm{SO}(2)$ の表現行列は $R(\theta)$ のみであったため、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(\theta).$$

(ii) $\det A = -1$ の場合、チャプター 4 で示した $\mathrm{SO}(2)$ の表現行列と同様の方法で、次のように定まる。

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R(\theta)S$$

以上より、

$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \sqcup \mathrm{SO}(2)S$$

*3 表記に関して、一般に $G \rtimes_{\varphi} H$ と $G \rtimes H$ は同意義であるが、今回は半直積が φ に依存していることを強調するために前者の書き方を使用する。

*4 連続性を保つためには $\mathrm{Aut}(\mathrm{SO}(2))$ が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることが要求され、連続性を保たなくて良いのであれば必ずしもそうではないが、微妙な事情のため省略する。

*5 $\therefore \det$ の定義より、 $\det A = \det A^T$ であり、このとき $I = \det AA^T = \det A \det A^T = (\det A)^2$ であるため。

である。この作用によって半直積 $\mathrm{SO}(2) \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を定める。

この半直積の積は $(A, i)(B, j) = (A\varphi_i(B), i + j)$ である。ただし $A, B \in \mathrm{SO}(2)$, $i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とする。写像 $\Phi : \mathrm{SO}(2) \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{O}(2)$ を $\Phi(A, i) = AS^i$ で定める。すなわち $\Phi(A, 0) = A$, $\Phi(A, 1) = AS$ である。ここで $S^2 = I$ であるから、 S^i は $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の代表元の取り方によらずに一意に定まる。また、 $AS^i \in \mathrm{O}(2)$ であるため Φ は写像として well-defined である。

まず、 Φ が群準同型であることを示す。任意の $(A, i), (B, j) \in \mathrm{SO}(2) \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を取る。ここで $S^i B = \varphi_i(B)S^i$ が成り立つ。実際、 $i = 0$ のときは明らかであり、 $i = 1$ のときは $SB = (SBS)S = \varphi_1(B)S$ である。したがって

$$\begin{aligned}\Phi(A, i)\Phi(B, j) &= AS^i BS^j \\ &= A\varphi_i(B)S^i S^j \\ &= A\varphi_i(B)S^{i+j} \\ &= \Phi(A\varphi_i(B), i + j).\end{aligned}$$

半直積の積の定義より $(A, i)(B, j) = (A\varphi_i(B), i + j)$ であるから、 $\Phi(A, i)\Phi(B, j) = \Phi((A, i)(B, j))$ である。したがって Φ は群準同型である。

次に、 Φ が全射であることを示す。任意の $X \in \mathrm{O}(2)$ を取る。すでに示した分解 $\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \sqcup \mathrm{SO}(2)S$ より、 $X = A$ または $X = AS$ となる $A \in \mathrm{SO}(2)$ が存在する。前者なら $X = \Phi(A, 0)$ 、後者なら $X = \Phi(A, 1)$ である。したがって Φ は全射である。

最後に、 Φ が単射であることを示す。 $\Phi(A, i) = I$ とする。すなわち $AS^i = I$ である。もし $i = 0$ なら $A = I$ である。もし $i = 1$ なら $AS = I$ より $A = S$ となる。しかし $\det S = -1$ であるから $S \notin \mathrm{SO}(2)$ であり、これは $A \in \mathrm{SO}(2)$ に反する。したがって $i = 0$, $A = I$ である。よって $\ker \Phi = \{(I, 0)\}$ であり、 Φ は単射である。

以上より、 Φ は全単射な群準同型である。したがって $\mathrm{O}(2) \cong \mathrm{SO}(2) \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。 □

7 複素平面での表現への展望

ここまでは群から $\mathbb{R}$ を体とする線形空間への表現について考察してきたが、 $\mathbb{C}$ での表現についても興味がある。例えば、今回扱った回転は $\mathbb{C}$ 平面では $z \mapsto e^{i\theta}z$ という変換に対応し、鏡映は $z \mapsto \bar{z}$ (複素共役) に対応する事がわかった。これらの事実から、他にも $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ の間には群の表現としての対応が見られると予測する。実数平面と同型な表現がまだ詳しくは扱わないが、今後調べたいと考えている。

参考文献

- [1] 雪江明彦『代数学 1 群論入門 [第 2 版]』日本評論社.
- [2] 齋藤正彦『線型代数入門』(基礎数学 1) 東京大学出版会.
- [3] Wikipedia「直交群」, <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%9B%B4%E4%BA%A4%E7%BE%A4> 閲覧日: 2026 年 2 月 24 日.
- [4] Wikipedia「半直積」, <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%8A%E7%9B%B4%E7%A9%8D> 閲覧日: 2026 年 3 月 10 日.
- [5] Wikipedia「回転群」, <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%9E%E8%BB%A2%E7%BE%A4> 閲覧日: 2026 年 2 月 24 日.
- [6] 数学の景色 | 直交群・回転群 (特殊直交群) とは～定義と性質～, <https://mathlandscape.com/rotation-group/> 閲覧日: 2026 年 3 月 1 日.

謝辞

本発表を進めるにあたり、日頃よりご指導いただいた八木春樹様、ならびに N 高研究部アドバイザーの市川航士郎様に心より感謝申し上げます。